

На правах рукописи

УДК: 523.3/4:528.2

КАЩЕЕВ Рафаэль Александрович

**СПУТНИКОВЫЕ МЕТОДЫ
ПЛАНЕТНОЙ ГРАВИМЕТРИИ**

Специальность 01.03.01 - астрометрия и небесная механика

**Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук**

Работа выполнена в Казанском государственном университете

Официальные оппоненты:

доктор физ.-мат. наук, профессор Ю.Г.МАРКОВ

доктор физ.-мат. наук Н.А.ЧУЙКОВА

доктор техн. наук, профессор С.Н.ЯШКИН

Ведущая организация:

Институт астрономии РАН

Защита состоится "....." "....." 2000 г. в 14 часов на заседании диссертационного совета Д 053.05.51 Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова по адресу: 119899, Москва, Университетский проспект, 13.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Государственного астрономического института им. П.К.Штернберга

Автореферат разослан "....." "....."

НАУЧНАЯ БИБЛИОТЕКА КГУ



0000011104

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физ.-мат. наук

Л.Н.БОНДАРЕНКО

Составляющая основу планетной гравиметрии проблема исследования гравитационных полей тел Солнечной системы носит комплексный характер и представляет собой сферу приложения интересов различных областей науки и техники. Наиболее эффективными экспериментальными методами решения этой проблемы являются методы, основанные на анализе динамики движения искусственных спутников в зоне притяжения исследуемых гравитирующих масс.

Классическая схема оценивания параметров гравитационного поля небесного тела опирается на интегрирование дифференциальных уравнений возмущенного движения искусственного спутника этого тела, связывающих изменения элементов спутниковой орбиты с характеристиками возмущающих сил. Однако, следуя этой методике, не удастся построить достаточно подробные многопараметрические модели потенциала, что вынуждает обратиться к методам, не связанным со сглаживающей процедурой интегрирования на значительных временных интервалах.

Для Земли решение задачи достигается привлечением результатов иных видов измерений, получаемых методами наземной гравиметрической съемки и спутниковой альтиметрии. Применительно к другим небесным телам аналогичная потребность в детализации моделей поля также ведет к поиску альтернативных источников дополнительной наблюдательной информации. Наиболее перспективными в этой связи представляются дифференциальные методы, использующие искусственный спутник в качестве пробного тела, слежение за поведением которого доставляет детальные сведения о структуре внешнего гравитационного поля.

Речь идет об измерениях относительных дальностей и скоростей КА в системе близких коорбитальных спутников, измерениях относительных лучевых скоростей и ускорений в системе спутников, обращающихся по разновысоким орбитам, а также бортовых градиентометрических измерениях вторых производных потенциала силы притяжения. Предварительные оценки позволяют надеяться, что именно перечисленные виды измерений в самом Недалеком будущем станут

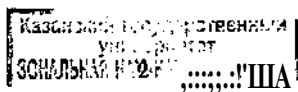
источником ценнейшей информации о подробностях структуры гравитационных полей ближайших к Земле тел Солнечной системы. Основанием к тому служит высокая ожидаемая точность и чувствительность измерений такого рода к региональным особенностям поля и его локальным аномалиям, открывающая возможности определения параметров потенциала в широком диапазоне частот.

Прообразом этих методов можно назвать многократно и весьма успешно реализованное в рамках различных планетных программ наземное доплеровское радиослежение за искусственными спутниками Луны, а также Марса и Венеры, с целью определения лучевой компоненты вектора спутниковых ускорений.

Все перечисленные методы, следуя [1], возможно объединить под общим названием методов дифференциальных измерений в системах с изменяемой геометрией расположения элементов. Указанные системы могут быть реализованы как в виде пробных масс, находящихся внутри искусственного спутника, так и в виде группы спутников (в том числе субсателлитов-мишеней), образующих ту или иную орбитальную конфигурацию.

С учетом сказанного выше основные цели диссертации сформулируем следующим образом:

- установление теоретических принципов и построение унифицированных алгоритмов обработки разнородных наблюдательных данных, доставляемых спутниковыми методами дифференциальных измерений в системах с изменяемой геометрией расположения пробных масс;
- поиск наивыгоднейших орбит и условий проведения спутниковых измерений, обеспечивающих максимальную точность оценивания параметров модели гравитационного поля исследуемого небесного тела (на примере Луны и Марса);
- исследование зависимости качества решения задач планетной гравиметрии от вида и состава привлекаемых наблюдений, а также влияния случайных и систематических ошибок различной природы.



Актуальность работы обусловлена двумя важными обстоятельствами:

- разработкой новых спутниковых методов получения гравиметрической информации по измерениям в системах с изменяемой геометрией расположения пробных масс;
- долгожданным возрождением интереса к осуществлению новых космических программ исследований Луны, Марса и других тел Солнечной системы.

Научная новизна и практическое значение исследований состоят в достижении следующих результатов:

- Исходя из анализа особенностей современного этапа изучения тел Солнечной системы, сформулирована основная задача планетной гравиметрии и показана целесообразность поиска путей ее решения на основе привлечения интегративных методов геодезии и гравиметрии.
- Разработаны универсальные методы и алгоритмы определения параметров моделей гравитационных полей небесных тел по данным разнородных спутниковых измерений.
- На основе развития теории обработки спутниковых измерений в системах с изменяемой геометрией расположения пробных масс получены уравнения наблюдений для вторых производных гравитационного потенциала, относительных лучевых скоростей в системе близких коорбитальных спутников и относительных лучевых ускорений в системе искусственных спутников, обращающихся по разновысоким орбитам.
- Разработана методика проведения численных имитационных экспериментов с целью поиска условий, обеспечивающих достижение максимальной точности оценивания параметров гравитационных полей небесных тел. Для каждого из перечисленных выше спутниковых методов выполнена серия численных экспериментов, имитирующих процедуру определения искомых параметров потенциала силы притяжения Луны и Марса. Проведены эксперименты по совместной обработке разнородных наблюдательных данных спутниковой градиентометрии и межспутникового слежения. По результатам вычислений высказан ряд рекомендаций по

выбору оптимальных орбитальных характеристик и условий натурных измерений.

- Разработана методика оценки влияния случайных и систематических ошибок различной природы на величины гармонических коэффициентов, получаемых по материалам разнородных бортовых измерений. Проведен комплекс численных экспериментов, иллюстрирующих эффективность применения этой методики при вычислении параметров селено- и ареопотенциалов.
- Созданы рабочие алгоритмы и вычислительные программы, предназначенные для априорного анализа эффективности использования различных орбитальных построений КА, проводящих измерения с целью уточнения параметров внешних гравитационных полей тел Солнечной системы.

Достоверность научных результатов и обоснованность выводов подтверждается их непротиворечивостью в сравнении с представлениями, сложившимися в данной области знаний, а также с результатами исследований других авторов.

Апробация работы. Основные результаты, опубликованные в 30 статьях и тезисах выступлений [88 - 112] и [255 - 257], неоднократно докладывались на различных Международных, Всесоюзных и Всероссийских симпозиумах, конференциях и совещаниях. В их числе: астрометрические конференции СССР и РФ (Москва, 1981; С.-Петербург, 1993); конференция "Селенодезия и динамика Луны" (Киев, 1987); совещания Рабочей группы "Луна" АС АН СССР (Москва, 1982; Львов, 1989; Зеленчук, 1991); конференции "Современные методы физической геодезии и спутниковой геодинамики" (С.-Петербург, 1992), "Общепланетарные проблемы исследования Земли" (Казань, 1994), "Физика и динамика Луны" (Харьков, 1994), "Стохастические методы и эксперименты в небесной механике" (Архангельск, 1995); симпозиумы по классической и небесной механике (Великие Луки, 1996 и 1998); конференция "Результаты и перспективы исследования планет" (Ульяновск, 1997) и др. Доклады автора также были представлены на съезде JENAM-95 (Италия, 1995); XX и XXIII Генеральных Ассамблеях EGS (Германия, 1995 и Франция, 1998), 3-ей Международной конференции по освоению Луны (Россия, 1998) и др.

На защиту выносятся:

- Формулировка основной задачи планетной гравиметрии и обоснование эффективности применения интегративного подхода к поиску ее решения.
- Методы и алгоритмы реализации интегративных принципов определения параметров гравитационных полей небесных тел по разнородным измерениям в системах с изменяемой геометрией расположения элементов.
- Теоретические основы получения уравнений спутниковых наблюдений для вторых производных гравитационного потенциала, относительных лучевых скоростей в системе близких коорбитальных искусственных спутников и относительных лучевых ускорений в системе спутников, обращающихся по разновысоким орбитам.
- Постановка и результаты численных имитационных экспериментов, ориентированных на поиск орбитальных характеристик движения искусственных спутников и условий измерений, обеспечивающих максимальную точность оценивания параметров моделей селено- и ареопотенциалов.
- Постановка и результаты численных имитационных экспериментов по исследованию в рамках каждого из рассматриваемых спутниковых методов влияния ошибок различной природы на точность оценивания параметров гравитационных полей тел Солнечной системы на примере Луны и Марса.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы.

Объем диссертации без библиографии составляет 240 страниц. В работе содержатся 45 рисунков и 5 таблиц. Список литературы включает 319 наименований.

Содержание и основные результаты работы

Во введении сформулированы главные цели исследования, аргументирована их фундаментальность и актуальность, раскрыта научная новизна и практическая значимость решения поставленных задач, перечислены основные положения работы, выносимые на защиту.

В первой главе диссертации очерчен круг проблем планетной гравиметрии, а также описана последовательность их решения на основе интегративного подхода, обладающего наибольшей универсальностью как с точки зрения обработки массивов разнородных наблюдательных данных, так и с точки зрения применения к различным телам Солнечной системы.

Параграф 1.1 посвящен изложению интегративных принципов и версий их реализации при совместной обработке результатов геодезических, гравиметрических и астрометрических измерений. В параграфе 1.2 нами в наиболее общей форме сформулирована основная задача планетной гравиметрии, состоящая в определении фигур и внешних гравитационных полей небесных тел по данным разнородных наблюдений, выполненных в различных точках пространства. Эта формулировка основывается на учете следующих особенностей современного этапа и будущих перспектив исследования тел Солнечной системы:

- проведение измерений в различных точках пространства (с поверхности Земли, с орбиты ИСЗ, с орбиты искусственного спутника исследуемого небесного тела, с поверхности самого тела и т.п.);
- преимущественное использование дистанционной спутниковой наблюдательной информации;
- разнородный характер имеющихся и планируемых измерений;
- высокая точность и большой объем измерительной информации;
- значительные различия в размерах, массах, форме, рельефе поверхности и внутреннем строении небесных тел.

Для планет земной группы наиболее употребительной формой численно-аналитического описания поля силы притяжения являет-

ся разложение гравитационного потенциала $V(\vec{X})$ в ряд объемных сферических (шаровых) функций:

$$V(\vec{X}) = \frac{GM}{r} \left[1 + \sum_{n=2}^{\tilde{N}} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r} \right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi) \right], \quad (1)$$

набор гармонических коэффициентов $\{C_{nm}, S_{nm}\}$ которого задает модель гравитационного поля рассматриваемого небесного тела. В (1) обозначено: G - гравитационная постоянная, M, a - полная масса и средний радиус гравитирующего тела, r, φ, λ - барицентрические сферические координаты точки X , \tilde{N} - размерность модели: максимальный порядок суммирования по индексу n , P_{nm} - присоединенные функции Лежандра.

Важную роль при этом играет выбор подробности модельного разложения, определяемой значением \tilde{N} . Главными критериями выбора \tilde{N} должны быть, на наш взгляд, точность проводимых для оценивания значений $\{C_{nm}, S_{nm}\}$ измерений, а также предполагаемое предназначение создаваемой модели. Так в прогностическом варианте, добиваясь удовлетворительной аппроксимации движения КА на спутниковых высотах, возможно надеяться на проявление внутренней согласованности большого числа параметров модели - размерность ее в этом случае, помимо точности измерений, лимитируется, в основном, вычислительными возможностями исследователя. При необходимости геофизической интерпретации стоковых постоянных к точности каждого отдельного параметра предъявляются много более строгие требования, чем в задачах аппроксимации и прогноза движения. Исходя из этого, возможно утверждать, что современная ситуация с моделями селено- и ареопотенциалов свидетельствует в пользу необходимости сосредоточения усилий не столько на наращивании числа определяемых гармонических коэффициентов, сколько на повышении точности оценивания их значений.

В последующих параграфах первой главы обсуждаются этапы решения главной задачи планетной гравиметрии на основе интегративных алгоритмов, разрабатываемых применительно к Земле для совместной обработки наземных геодезических, гравиметрических, астрометрических и спутниковых наблюдений [5 - 9] и др.

Отправной точкой поиска решения служит получение уравнения наблюдений, связывающего результат измерения L с искомыми пара-

метрами модели гравитационного поля. Представим L в виде нелинейного функционала на потенциале силы тяжести W :

$$L = F(\vec{X}, W), \quad (2)$$

где $\vec{X} \in E_k$ - вектор положения одной или нескольких точек, участвующих в измерении L , E_k - евклидово пространство размерности k , $W = V + \frac{\omega^2}{2}(X^2 + Y^2)$, $V \in H$, V - потенциал силы притяжения во внешнем пространстве, H - гильбертово пространство гармонических функций. Таким образом, функционал F отображает произведение пространств E_k и H в пространство E_1 действительных чисел:

$$F: E_n \times H \rightarrow L \in E_1. \quad (3)$$

Обозначив через $Z = E_n \times H = (\vec{X}, V)$, прямое произведение пространств E_k и H , линеаризуем функционал $F(Z)$ в окрестности точки $Z^* = (\vec{X}^*, V^*)$, где $V^* = U - \frac{\omega^2}{2}(X^2 + Y^2)$, а U - нормальный (референсный) потенциал силы тяжести. Можно показать, что тогда

$$dL = L - F(Z^*) = \frac{\partial F}{\partial \vec{X}} d\vec{X} + \Re T, \quad (4)$$

где $d\vec{X} = \vec{X} - \vec{X}^*$, и $T = W - U = V - V^*$. Второе слагаемое в (4) обозначает результат действия линейного дифференциального оператора \mathcal{L} на возмущающий потенциал T .

Укажем в этой связи на важное обстоятельство, упрощающее применение интегративных методов в планетной гравиметрии. Однократный характер дистанционных спутниковых наблюдений предполагает использование модельных представлений потенциала, вследствие чего (2) возможно переписать в виде

$$L = F(\vec{X}, V\{C_{nm}^*, S_{nm}^*\}). \quad (5)$$

Тогда неизбежное на практике усечение ряда (1) максимальным значением \tilde{N} индекса степени n обеспечивает возможность проведения всех дальнейших операций в конечномерном пространстве векторов. При этом линеаризация (5) приводит к уравнению поправок:

$$\begin{aligned} dL &= L - F(\vec{X}^*, V\{C_{nm}^*, S_{nm}^*\}) = \\ &= \frac{\partial F}{\partial \vec{X}} d\vec{X} + \sum_{n,m} \frac{\partial F}{\partial \{C_{nm}, S_{nm}\}} d\{C_{nm}, S_{nm}\}, \end{aligned} \quad (6)$$

с неизвестными поправками $d\vec{X}$ в приближенно известное на момент наблюдения t значение вектора состояния \vec{X} и поправками $d\{C_{nm}, S_{nm}\}$ в параметры референчной (нормальной) модели потенциала. В зависимости от условий конкретной задачи последние могут быть либо поправками в приближенно известные значения коэффициентов референчной модели, либо неизвестными коэффициентами старших по сравнению с ней степеней и порядков.

С другой стороны, вектор $d\vec{X}$ может быть интерпретирован как ошибка вектора состояния \vec{X} , допущенная при осуществлении координатной привязки КА. Указанной ошибкой возможно пренебречь, если потребовать выполнение условия

$$|d\vec{X}| \leq \frac{m(L)}{|\text{grad}F|_{\max}},$$

гарантирующего, что влияние ошибки позиционирования $|d\vec{X}|$ на результат измерения L не превысит среднеквадратического значения $m(L)$ ошибки измерения. Задавшись рациональным значением последней для конкретного вида наблюдений, приходим к величине максимально допустимой ошибки навигационной привязки КА, выполняющего наблюдения рассматриваемого вида.

В этой связи важное значение приобретает проблема установления системы отсчета, в которой происходит позиционирование КА. Содержание параграфа 1.6 составляет выполненный на примере Луны конспективный обзор источников наблюдательной информации, используемых при построении лунной (планетной) системы координат, а также возможный интегративный метод решения этой задачи по данным разнородных измерений. Предложенный способ создания сводного каталога координат опорных точек селенодезической сети основан на методе "искусственных измерений". В качестве таких "измерений" выбираются длины лунных хорд, обладающие инвариантностью к несовпадению центров и рассогласованию ориентации базисных осей каждого из объединяемых каталогов.

Использование интегративных методов обработки данных приводит к системе уравнений поправок, соответствующих измерениям различной размерности и точности. Задача установления весов для разнородных уравнений, входящих в общую систему, обсуждается в параграфе 1.7. Поиск решения ее осуществляется на основе градиентного

метода, в согласии с которым элементы записываемого в n -мерном евклидовом пространстве вектора-градиента функционала выступают в системе уравнений поправок в роли коэффициентов при элементах n -мерного вектора неизвестных. Нормализация каждого из уравнений системы путем деления его на модуль градиента приводит к системе однородных по размерности, но неравноточных уравнений. поправок, назначение весов которым проводится далее обратно пропорционально нормализованным ошибкам наблюдений.

Заключительному этапу решения главной задачи планетной **гравиметрии** посвящен **параграф 1.8**, в котором представлен обзор методов оценивания параметров математической модели по результатам измерений.

Описанная выше методика использована нами для исследования ряда дифференциальных спутниковых методов планетной гравиметрии, опирающихся на измерения в системах с изменяемой геометрией расположения пробных масс.

Вторая глава посвящена спутниковой градиентометрии - одному из наиболее перспективных методов определения параметров гравитационных полей тел Солнечной системы по бортовым измерениям вторых производных потенциала силы притяжения. Как показано в параграфе 2.1, измерение вторых производных гравитационного потенциала инструментально сводится к измерению компонент вектора относительного ускорения двух (или более) пробных масс одновременно с измерением компонент вектора их относительного положения.

Содержание параграфа 2.2 составляет процедура вывода уравнений наблюдений для каждого из элементов матрицы вторых производных в различных системах координат.

Уравнения наблюдений для измеряемых компонент тензора вторых производных гравитационного потенциала в прямоугольной горизонтной спутникоцентрической системе координат $Sxyz$ (ось z - к центру масс планеты, ось x - к северу, ось y - к востоку) имеют вид (7). Производные потенциала $V(S)$ по сферическим планетоцентрическим координатам вычисляются дифференцированием ряда (1).

$$\begin{aligned}
V_{xx} &= \frac{1}{r^2} V_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r} V_r, \\
V_{yy} &= \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} V_{\lambda\lambda} - \frac{\tan \varphi}{r^2} V_{\varphi} + \frac{1}{r} V_r, \\
V_{zz} &= V_{rr}, \\
V_{xz} &= -\frac{1}{r} V_{\varphi r} + \frac{1}{r^2} V_{\varphi}, \\
V_{yz} &= -\frac{1}{r \cos \varphi} V_{\lambda r} + \frac{1}{r^2 \cos \varphi} V_{\lambda}, \\
V_{\Delta} &= V_{yy} - V_{xx} = \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} V_{\lambda\lambda} - \frac{1}{r^2} V_{\varphi\varphi} - \frac{\tan \varphi}{r^2} V_{\varphi}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Вычисление элементов тензора вторых производных в прямоугольной орбитальной спутникоцентрической системе координат $Swvz$ (ось z - к центру масс планеты, ось v - по вектору линейной скорости спутника) может быть проведено по формулам:

$$\begin{aligned}
V_{vv} &= V_{xx} \cos^2 \theta + 2V_{xy} \cos \theta \sin \theta + V_{yy} \sin^2 \theta \\
V_{ww} &= V_{xx} \sin^2 \theta - 2V_{xy} \cos \theta \sin \theta + V_{yy} \cos^2 \theta \\
V_{zz} &= V_{zz} \\
V_{vw} &= -V_{xx} \cos \theta \sin \theta + 2V_{xy} \cos \theta \sin \theta + V_{yy} \cos \theta \sin \theta \\
V_{vz} &= V_{xz} \cos \theta + V_{yz} \sin \theta \\
V_{wz} &= -V_{xz} \sin \theta + V_{yz} \cos \theta \\
V_D &= V_{ww} - V_{vv} = (V_{yy} - V_{xx}) \cos 2\theta - 2V_{xy} \sin 2\theta,
\end{aligned} \tag{8}$$

где θ - угол между осями x и v .

Переход от уравнений наблюдений к уравнениям поправок осуществляется в каждом случае путем линеаризации уравнений наблюдений в окрестности априорно заданной приближенной (референционной или нормальной) модели поля, описываемой набором гармонических коэффициентов $\{C_{nm}^*, S_{nm}^*\}$. Тогда для некоторого измеренного значения второй производной V_{**} уравнение поправок имеет вид:

$$dV_{**}(S) = \sum_{n,m} \frac{\partial V_{**}(S)}{\partial \{C_{nm}, S_{nm}\}} d\{C_{nm}, S_{nm}\}, \tag{9}$$

где $dV_{**}(S) = V_{**}(S) - V_{**}^0(S)$ есть разность измеренного и референционного значения второй производной.

Получение уравнений наблюдений и уравнений поправок в системах координат S_{xyz} и S_{wvz} позволяет приступить к проведению численных экспериментов для Луны и Марса. Прежде, однако, в параграфе 2.3 подробно обсуждаются результаты моделирования полей различных вторых производных на селено- и ареоцентрических орбитах. Вычисление производных осуществляется на спутниковых высотах в спутникоцентрической горизонтной системе координат S_{xyz} , выбранной нами с целью достижения максимальной наглядности в процессе геофизической интерпретации.

Для Луны поведение радиальной производной V_{zz} силы притяжения, характеризующей кривизну уровенной поверхности ее потенциала, качественно согласуется с картой высот селеноида. Для Марса поле этой же второй производной отличается регулярным субширотным простираанием изолиний, демонстрирующим подавление локальных аномалий глобальной длинноволновой компонентой.

Кривизна силовой линии поля силы притяжения (отвесной линии) в плоскостях меридиана и первого вертикала определяется вторыми производными V_{xz} и V_{yz} соответственно. И для Луны, и для Марса поведение этих производных сильно различается: если поведение производной V_{yz} уверенно коррелирует с основными элементами макрорельефа, то в поведении производной V_{xz} практически отсутствует сколько-нибудь заметное согласие с деталями физической поверхности. Представленные карты хорошо отражают асимметрию видимой и обратной стороны Луны; асимметрия северного и южного ее полушарий выражена в меньшей степени.

Целью проводимых далее численных экспериментов, описанию постановки которых посвящается параграф 2.4, является поиск наиболее выгоднейших условий выполнения спутниковых градиентометрических измерений, обеспечивающих достижение максимальной точности оценивания параметров гравитационных потенциалов Луны и Марса.

Измерения вторых производных моделировались в точках семейства 12-ти равноотстоящих друг от друга по долготе круговых селено- и ареоцентрических орбит при различных для различных семейств значениях их наклона и высоты над поверхностью небесного тела. Уравнения поправок записывались для $(2N + 1)$ неизвестных гармонических коэффициентов фиксированной степени N . Измеряемая

составляющая свободного члена уравнения поправок моделировалась по полному набору гармонических коэффициентов исходной модели псевдореального поля и возмущалась случайным нормально распределенным шумом, имеющим смысл ошибки измерения. В качестве исходных моделей поля использованы модель (BF) Биллза, Феррари [3] для Луны и модель (BMV) Бальмино и др. [2] для Марса.

Референцная компонента свободного члена уравнения поправок включала все низкочастотные гармоники разложения потенциала степеней $l \leq N$. В гармонические коэффициенты, используемые для вычисления референцной составляющей, были включены систематические ошибки, имитирующие неизбежно присутствующие в реальном случае ошибки параметров референцной модели поля.

Количественная оценка качества каждого сценария производилась путем сопоставления восстановленных в результате его реализации гармонических коэффициентов с соответствующими коэффициентами модели псевдореального поля, используемой для моделирования измерений. Другими словами, в каждой точке двумерной области "высота - наклонение орбиты" вычислялся выбранный в качестве максимизируемого критерия безразмерный коэффициент r_N :

$$r_N = \frac{\sum_{m=0}^N C_{Nm} \tilde{C}_{Nm} + \sum_{m=0}^N S_{Nm} \tilde{S}_{Nm}}{\sqrt{\sum_{m=0}^N (C_{Nm}^2 + S_{Nm}^2) \sum_{m=0}^N (\tilde{C}_{Nm}^2 + \tilde{S}_{Nm}^2)}}. \quad (10)$$

Здесь $\{C_{nm}, S_{nm}\}$ - набор гармонических коэффициентов исходной модели гравитационного потенциала, $\{\tilde{C}_{nm}, \tilde{S}_{nm}\}$ - набор оценок гармонических коэффициентов, полученный в результате решения системы уравнений поправок. Критерий (10) имеет смысл коэффициента корреляции гармонических коэффициентов степени N , взятых из двух различных (с тильдой и без нее) моделей гравитационного потенциала. Выбор критерия основывается на заявленном выше принципе достижения максимальной точности оценивания каждого искомого параметра. Важно подчеркнуть, что, если аналогичные по постановке задачи исследования обычно используют для оценки качества решения ковариационную матрицу ошибок неизвестных, характеризующую внутреннюю точность получаемых результатов, то выбранный нами критерий r_N дает внешнюю ее оценку по степени близости полученной модели потенциала к модели исходного поля.

Предварительные вычисления показали, что каждому значению N для каждого небесного тела соответствует собственный коридор высот, обеспечивающий оптимальные условия определения искомых параметров. Ширина коридора примерно одинакова для каждой из рассматриваемых производных, но может быть значительно расширена при одновременном измерении и дальнейшей совместной обработке двух различных вторых производных. В этом случае также существенно ослабляется установленная нами для отдельных производных сильная зависимость точности решения от наклона орбиты. Таким образом, главный вывод параграфа 2.4 состоит в том, что используемые в спутниковой градиентометрии измерительные устройства должны обеспечивать возможность измерения нескольких различных вторых производных гравитационного потенциала.

Более подробно вопросы выбора наиболее предпочтительных орбит и состава градиентометрических измерений рассмотрены нами в параграфе 2.5. Учитывая установленные выше преимущества объединения наблюдений различного вида, поиск спутниковых орбит, обеспечивающих максимальную точность оценивания параметров селено- и ареопотенциалов, проводился для случая совместных измерений двух и трех различных вторых производных и дальнейшей совместной обработки этих измерений.

Выбор оптимальных условий осуществлялся путем комбинации координатного и градиентного методов поиска максимальных значений r_N в двумерной области изменения наклонов и высот. Исследовалась полная структура фазовых пространств в указанных фазовых переменных для каждого $N = 6, 7, 8, \dots, 14$ и комбинаций вторых производных (V_{vz}, V_{wz}) , (V_{vz}, V_{zz}) , (V_{wz}, V_{zz}) , (V_D, V_{vz}) , (V_D, V_{wz}) , а также (V_D, V_{vz}, V_{wz}) как для Луны, так и для Марса.

Результаты численных экспериментов позволяют утверждать, что с увеличением степени оцениваемых гармонических коэффициентов возрастает избирательность метода к параметрам орбит искусственных спутников. При этом для каждого набора измеряемых вторых производных существует общий для всех рассматриваемых значений N диапазон наклонов, доставляющий максимальную точность решения. В случае измерения трех производных (V_D, V_{vz}, V_{wz}) он оказывается наиболее широким ($i = 35^\circ - 90^\circ$). Примечательно также, что эти диапазоны наклонов почти одинаковы для Луны и Марса.

В отличие от диапазонов наклонов, выделить общий приоритетный для всех N коридор высот не представляется возможным. Каждому значению N соответствует собственный диапазон оптимальных высот, почти не зависящий от вида измеряемых производных. В связи с этим, для спутниковой градиентометрии, возможно, следует использовать слабозллиптические орбиты, определяя гармонические коэффициенты различных степеней по измерениям в оптимальных для данной степени коридорах высот.

Что касается зависимости точности решения задачи от состава измерений, то наиболее информативной, т.е. обеспечивающей наиболее точное решение оказывается комбинация трех вторых производных $(V_{D'}, V_{VZ'}, V_{WZ'})$. Далее по степени убывания информативности следуют комбинации производных $(V_{WZ'}, V_{ZZ'})$ и $(V_{VZ'}, V_{WZ'})$.

В параграфе 2.6 проведено исследование влияния ошибок различной природы на точность оценивания параметров гравитационных полей Луны и Марса по бортовым измерениям вторых производных. При этом влияние случайных ошибок измерений моделировалось аддитивным наложением на результаты измерений случайного шума, а влияние систематических ошибок априорных данных - мультипликативным искажением параметров модели референчного поля.

Использована следующая модель ошибок свободного члена dV_{**} левой части уравнения поправок (9). Запишем моделируемую измеряемую компоненту V_{**} в виде:

$$V_{**}(S) = \sum_{n=0}^{N-1} Z_n(S) + Z_N(S) + \sum_{n=N+1}^{\hat{N}} Z_n(S) + v_L, \quad (11)$$

а референчную - в виде

$$V_{**}^0(S) = (1 - \alpha) \sum_{n=0}^{N-1} Z_n(S), \quad (12)$$

где v_L - случайная ошибка измерения, числовой безразмерный коэффициент $0 \leq \alpha \leq 1$ есть мера систематической погрешности референчной составляющей, а \hat{N} - максимальная степень гармонических коэффициентов используемой модели. Тогда

$$dL = V_{**}(S) - V_{**}^0(S) = \alpha \sum_{n=0}^{N-1} Z_n(S) + Z_N(S) + \sum_{n=N+1}^{\hat{N}} Z_n(S) + v_L. \quad (13)$$

Правая часть уравнений поправок вида (13) записывалась для входящих в $Z_n(S)$ $(2N+1)$ неизвестных гармонических коэффициентов фиксированной степени N . Тем самым предпоследнее слагаемое в (13), включающее коэффициенты старших по сравнению с N степеней $N+1 \leq n \leq \tilde{N}$, выступало в качестве не учитываемого в правой части уравнения поправок, но в реальном случае неизбежно присутствующего возмущающего фактора, влияние которого в нашем случае суммировалось со случайной ошибкой измерений.

Качественная картина систематического влияния неточности референчного поля с одной стороны и случайных ошибок измерений - с другой почти не зависит от вида измеряемых производных, но сильно различается у Луны и Марса. Марс оказывается много более чувствительным к точности референчной модели, Луна сильнее реагирует на рост ошибок измерений. Природа этого эффекта заключена, на наш взгляд, в большей неоднородности гравитационного поля Луны в сравнении с более регулярным полем Марса, основная часть влияния неоднородностей которого сосредоточена в области низких частот. И случайные, и систематические ошибки по мере их увеличения приводят к сужению диапазонов оптимальных наклонений и снижению коридоров оптимальных высот.

Параграф 2.6 завершается обсуждением результатов численных экспериментов по оценке влияния погрешностей позиционирования искусственного спутника в момент градиентометрических измерений. Оценки производились по схеме, изложенной в параграфе 1.5, в согласии с которой вычислялись компоненты вектора, получаемого в результате действия оператора градиента на уравнения наблюдений для различных вторых производных. Результаты вычислений корректируют выводы об оптимальном составе измерений, поскольку измерение производных V_{xx} , V_{yy} , V_{zz} оказывается непродуктивным вследствие нереализуемости возникающих при этом требований к обеспечению координатной привязки градиентометра на субметровом уровне точности. Это означает, что наибольшая точность оценивания искомым гармонических коэффициентов в спутниковой градиентометрии может быть достигнута совместным измерением двух (V_{xz} , V_{yz}) или трех (V_D , V_{xz} , V_{yz}) вторых производных гравитационного потенциала исследуемого тела.

Содержание третьей главы составляет исследование методов

и условий решения основной задачи планетной гравиметрии по данным межспутникового слежения в системе двух близких коорбитальных искусственных спутников S_1 и S_2 . Основным видом наблюдений в такой системе является относительная лучевая скорость \dot{s} , представляющая собой проекцию вектора относительной линейной скорости на направление S_1S_2 .

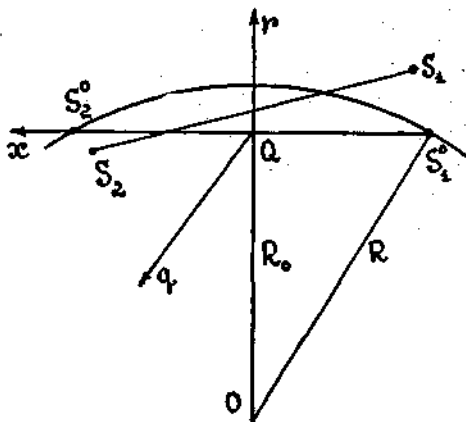


Рис.1. Спутникоцентрическая система координат $Qrxq$

Для получения точной формулы уравнения наблюдений введем вращающуюся орбитальную систему координат $Qrxq$ (см. рис. 1), начало которой совместим с серединой отрезка прямой длины s_0 , соединяющей точки S_1^0 и S_2^0 расположения спутников на опорной (номинальной) круговой орбите радиуса R в начальный момент t_0 . Ось x устремим по направлению $S_1^0S_2^0$, ось r - от центра гравитирующего тела в плоскости опорной орбиты перпендикулярно оси x . Придадим системе $Qrxq$ вращение в орбитальной плоскости с постоянной угловой скоростью ω , равной круговой скорости на расстоянии $OS_1^0 = OS_2^0 = R$ от центра вращения O . Пусть также в момент измерения t спутник S_1 находится в точке с координатами $((R_0 + r_1), (-\frac{s_0}{2} + x_1), q_1)$, а спутник S_2 - в точке с координатами $((R_0 + r_2), (\frac{s_0}{2} + x_2), q_2)$. Здесь R_0 - длина отрезка прямой, соединяющей точки O и Q , а s_0 - длина отрезка $S_1^0S_2^0$. Тогда разность кинетических

энергий спутников единичной массы

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[(v_2^a)^2 - (v_1^a)^2] = & \omega R_0 \{ \Delta \dot{x} + \omega \Delta r + \omega [(s_0 + \Delta x) \frac{x_1 + x_2}{2R_0} + \\ & + \Delta r \frac{r_1 + r_2}{2R_0}] - \frac{s_0}{2R_0}(\dot{r}_1 + \dot{r}_2) + \frac{r_2}{R_0} \dot{x}_2 - \frac{r_1}{R_0} \dot{x}_1 + \frac{x_1}{R_0} \dot{r}_1 - \frac{x_2}{R_0} \dot{r}_2 + \\ & + \frac{\Delta \dot{r}}{2\omega R_0}(\dot{r}_1 + \dot{r}_2) + \frac{\Delta \dot{x}}{2\omega R_0}(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) + \frac{\Delta \dot{q}}{2\omega R_0}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \} \end{aligned} \quad (14)$$

будет в согласии с законом сохранения энергии равна разности ньютоновских потенциалов V_1 и V_2 в точках S_1 и S_2 :

$$\frac{1}{2}[(v_2^a)^2 - (v_1^a)^2] = (V_1 - V_2). \quad (15)$$

В (14) обозначено: $\Delta r = r_2 - r_1$, $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta q = q_2 - q_1$, $\Delta \dot{r} = \dot{r}_2 - \dot{r}_1$, $\Delta \dot{x} = \dot{x}_2 - \dot{x}_1$, $\Delta \dot{q} = \dot{q}_2 - \dot{q}_1$. Равенства (14) и (15) позволяют далее не только перейти к уравнению наблюдений

$$\dot{s} = \frac{1}{\omega R_0}(V_1 - V_2) \quad (16)$$

и соответствующему ему уравнению поправок, но и с необходимой строгостью оценить влияние сделанных при этом упрощений.

В параграфе 3.2 рассматривается постановка и результаты численного имитационного эксперимента по межспутниковому слежению в цепочке двух близких искусственных спутников Луны и Марса с целью установления параметров спутниковых орбит и условий натурных измерений, обеспечивающих максимально точное оценивание параметров гравитационных потенциалов этих небесных тел.

Постановка численных экспериментов осуществлялась по схеме, аналогичной схеме численных экспериментов по спутниковой градиентометрии в окрестности Луны и Марса. Конфигурация точек орбит, в которых моделировались межспутниковые измерения, повторяла конфигурацию, описанную выше. Система уравнений поправок составлялась и решалась отдельно для каждого N ($N = 6, 7, 8, \dots 14$) в узловых точках трехмерного фазового пространства, выбираемых с постоянным шагом по каждой из фазовых координат: "высота - наклонение - межспутниковое расстояние".

Расчеты показали, что для межспутниковое слежения так же, как и для спутниковой градиентометрии, с ростом N возрастает избирательность метода к выбору параметров спутниковых орбит.

И для Луны, и для Марса для всех N оптимальные наклонения практически всегда превышают 45° , а максимальные значения критерия r_N достигаются на близполярных орбитах, что делает их наиболее предпочтительными для проведения межспутниковых измерений. Поскольку коридоры оптимальных высот для различных N достаточно широки и слабо сужаются с увеличением TV , измерения целесообразно выполнять на круговых орбитах.

Сопоставление относительных дальностей, обеспечивающих максимум критерия r_N , с разрешающей способностью гармоник тех же степеней свидетельствует о том, что движение цепочки низких коорбитальных спутников оказывается наиболее чувствительным к влиянию гравитационных аномалий, простирающие которых в 1.5 - 2 раза превышает величину межспутникового расстояния.

Анализ влияния случайных и систематических ошибок различного происхождения позволяет утверждать, что возрастание их величин во всех случаях приводит к сужению диапазонов оптимальных высот и наклонений. Еще более настоятельным становится при этом использование близполярных орбит. Сужение коридоров оптимальных высот сопровождается уменьшением абсолютных значений самих высот.

Обращает на себя внимание сильная зависимость точности решения от уровня систематических ошибок. При этом Марс реагирует на систематические возмущения референцной модели поля заметно острее, нежели Луна. Сравнение результатов численных экспериментов по спутниковой градиентометрии и межспутниковому слежению на селено- и ареоцентрических орбитах позволяет сделать вывод о том, что метод межспутникового слежения предъявляет по сравнению с методом спутниковой градиентометрии много более строгие требования к точности референцной модели гравитационного поля.

В заключение параграфа 3.3 проведена оценка корректности упрощений, предпринятых при выводе уравнения наблюдения для относительных лучевых скоростей. Показано, что использование для вывода уравнения наблюдения закона сохранения энергии требует в дальнейшем привлечения дополнительной измерительной информации об относительном положении спутников, точность которой должна удовлетворять достаточно жестким требованиям.

В параграфе 3.4 рассмотрена постановка и результаты комплексного численного эксперимента по определению параметров селено- и

ареопотенциалов путем совместной обработки разнородных бортовых измерений, выполненных методами спутниковой градиентометрии и межспутникового слежения на одном временном интервале. По результатам расчетов возможно сформулировать два основных вывода. Во-первых, совместная обработка данных спутниковой градиентометрии и межспутникового слежения при рациональном назначении весов позволяет добиться увеличения значений критерия r_N на несколько процентов по сравнению с раздельным уравниванием того же объема однородных измерений. Статистические оценки показывают, что полученные результаты почти всегда противоречат гипотезе о незначимости указанных различий в значениях критерия. Во-вторых, комбинация разнородных измерительных данных обеспечивает существенное расширение диапазонов наклонов и высот спутниковых орбит, доставляющих максимально точные результаты определения параметров гравитационных полей Луны и Марса.

В параграфе 3.5 исследована кинематическая схема относительного движения пары искусственных спутников, выведенных на круговую орбиту с небольшими нарушениями их коорбитальности. Соответствующие соотношения получены во вращающейся системе координат $Qrxq$, использованной выше при выводе уравнения наблюдений. Показано, что нарушающая устойчивость системы почти коорбитальных спутников S_1 и S_2 вековая составляющая эволюции орбитальной конфигурации возникает лишь вследствие начальных расхождений по радиусу-вектору и/или в скорости по направлению S_1S_2 .

В четвертой главе рассматриваются методы и условия решения главной задачи планетной гравиметрии по наблюдениям в системе искусственных спутников, обращающихся по орбитам, существенно различающимся по высоте. Геометрическая картина измерений такого рода аналогична схеме наземного доплеровского радиослежения за искусственными спутниками ближайших к Земле небесных тел.

Представим потенциал силы притяжения $V(S_2)$ в точке S_2 внешнего пространства в виде суммы референчного потенциала $V^*(S_2)$ и неизвестного аномального потенциала $\Delta V(S_2)$. Предположим также, что движение высокого спутника S_1 вследствие его значительной удаленности от гравитирующего тела происходит под действием лишь референчной составляющей гравитационного потенциала. Тогда

$$V(S_1) = V^*(S_1), \quad V(S_2) = V^*(S_2) + \Delta V(S_2). \quad (17)$$

Введем вращающуюся орбитальную спутникоцентрическую систему координат S_1xyz (ось x - вдоль направления S_2S_1 , ось z - по нормали к плоскости, проходящей через точки S_1 , S_2 и точку O - центр масс гравитирующего тела). Поскольку лучевое ускорение есть не что иное, как производная по направлению S_1S_2 разности гравитационных потенциалов в точках S_2 и S_1 :

$$\Gamma = -\frac{\partial}{\partial x}[V(S_2) - V(S_1)] = -\frac{\partial}{\partial x}[V^*(S_2) - V^*(S_1)] - \frac{\partial}{\partial x}\Delta V(S_2). \quad (18)$$

Отмеченная выше аналогия между измерениями в системе разноточных КА и описанным в параграфе 4.1 наземным радиослежением за искусственными спутниками позволяет, используя предложенный Броваром [4] алгоритм дифференцирования гравитационного потенциала по произвольному направлению, выразить последнее слагаемое в правой части (18) через гармонические коэффициенты разложения потенциала в ряд объемных сферических функций, начиная с некоторой степени N :

$$-\frac{\partial}{\partial x}\Delta V(S_2) = \frac{GM}{2R^2} \sum_{n=N}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho_2}\right)^{n+2} [2C'_{n0} \cos \lambda'_2 P_{n+1,1}(\sin \varphi'_2) + Q_n], \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} Q_n = & \sum_{p=1}^n \{ [C'_{np} \cos(p+1)\lambda'_2 + S'_{np} \sin(p+1)\lambda'_2] P_{n+1,p+1}(\sin \varphi'_2) - \\ & -(n-p+1)(n-p+2) \times \\ & \times [C'_{np} \cos(p-1)\lambda'_2 + S'_{np} \sin(p-1)\lambda'_2] P_{n+1,p-1}(\sin \varphi'_2) \}. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь $\{C'_{np}, S'_{np}\}$ - совокупность гармонических коэффициентов модели потенциала, соответствующей промежуточной барицентрической системе координат $OX'Y'Z'$, оси которой ориентированы по направлению осей системы S_1xyz . Необходимую для формирования системы уравнений поправок трансформацию указанных коэффициентов в жестко связанную с исследуемым небесным телом систему координат $OXYZ$ проведем по методике Леви [10], опирающейся на инвариантность формы записи интегралов уравнения Лапласа к повороту базисной тройки векторов вокруг начала координат. Параграф 4.3 содержит изложение математических процедур получения искомого уравнения поправок относительных лучевых ускорений.

С другой стороны, нами показано, что в системе координат $S_{\text{л.из}}$ значение лучевого ускорения может быть получено в результате дифференцирования по времени значения измеренной лучевой скорости $\Delta \dot{r}$, предварительно исправленной для перехода в невращающуюся систему отсчета поправкой $-\omega_3 Y_1'$:

$$\Gamma = \frac{\partial}{\partial t}(\Delta \dot{r} - \omega_3 Y_1'), \quad (21)$$

где $\Delta \dot{r}$ - относительная лучевая скорость спутников, ω_3 - апликата вектора угловой скорости вращения спутника S_1 .

Таким образом, лучевые ускорения не являются непосредственно измеряемыми величинами. Измерения же лучевых скоростей, во-первых, относятся к дискретным моментам, а, во-вторых, отягощены неизбежной ошибкой, в силу чего операция численного дифференцирования приобретает некорректный характер. Обсуждению путей решения задачи о гладком восполнении функции, определенной в узлах сетки с некоторой ошибкой, посвящен параграф 4.4.

В параграфе 4.5 рассматриваются условия взаимной видимости двух КА, обращающихся вокруг центрального планетного тела по произвольным круговым орбитам. Результаты моделирования свидетельствуют о том, что для получения одинаковых объемов измерительной информации продолжительность измерений в системе разнорысоких спутников должна быть в несколько раз больше, чем в системе координатных аппаратов.

В следующем параграфе 4.6 обсуждаются результаты численных экспериментов, имитирующих получение параметров гравитационных полей Луны и Марса по межспутниковым измерениям в системе искусственных спутников, круговые селено- и ареоцентрические орбиты которых существенно различаются по высоте, а также наклонению и долготе восходящего узла. Постановка численного эксперимента в основном повторяла схему, описанную выше. В ходе вычислений для Луны и Марса осуществлялся поиск максимальных для каждого N значений критерия r_N на множестве узловых точек фазовой плоскости "высота низкого КА - наклонение низкого КА" при фиксированных значениях высоты и наклонения орбиты высокого КА.

Результаты расчетов позволяют говорить о высокой избирательности исследуемого метода к наклонению орбиты низкого искусственного спутника. Предпринятый в ходе численного эксперимента пере-

ход к новому значению наклона орбиты высокого спутника вызвал смещение диапазона наивыгоднейших наклонов i_2 низкого КА примерно на величину разности между новым и прежним значениями i_1 . Изменения же высоты H_1 приводят к незначительным изменениям диапазонов величин i_2 и H_2 .

Большой интерес с практической точки зрения представляет сопоставление рассмотренных версий метода межспутникового слежения. Предварительное согласование точностей измеряемых величин показало, что с.к.о. = 0.005 мм/сек измерений относительных лучевых скоростей пары коорбитальных КА соответствует с.к.о. = 0.02 мГал относительных лучевых ускорений разновысоких искусственных спутников. С учетом этого сравнение точностей оценивания гармонических коэффициентов в каждой из версий позволяет говорить о некотором преимуществе наблюдений в коорбитальной-системе.

Сравнение рассмотренных в настоящей работе методов планетной гравиметрии с точки зрения перспектив их применения для изучения гравитационных полей тел Солнечной системы позволяет сделать вывод о приоритете метода спутниковой градиентометрии перед методом межспутникового слежения. Реализация метода межспутникового слежения оказывается существенно более сложной в организационном плане, поскольку требует формирования в окрестности исследуемого небесного тела системы нескольких КА, образующих в процессе движения номинальную пространственную конфигурацию. Отметим также более высокие требования, предъявляемые этим методом к точности референцной модели поля и точности данных о положениях и скоростях входящих в систему искусственных спутников.

Цитируемая литература

1. Тараканов Ю.А. Сочетание методов геодезии и гравиметрии: 1. Методы измерения совокупности гравитационных аномалий. - Изв. вузов. Геод. и аэрофот., 1997, No 2-3, 35 - 47.
2. Balmino G., Moynot B., Vales N. Gravity field model of Mars in spherical harmonics up to degree and order eighteen. - J. Geophys. Res., 1982, v.87, No B12, 9735 - 9746.
3. Bills B.G., Ferrari A.J. A harmonic analysis of lunar gravity. - J. Geophys. Res., 1980, v.82, No B2, 1013 - 1025.

4. Brovar V.V. Determining the gravity potential by means of a force component in a constant direction. - Stud. Geophys. et Geod., 1970, v.14, part 2, 242 - 250.
5. Hein G.W. A contribution to 3d-operational geodesy. Part 1: Principle and observational equations of terrestrial type. - Deutsche Geod. Komiss., 1982, R.B, Nr. 258/6, 31 - 64.
6. Hein G.W. A contribution to 3d-operational geodesy. Part 2: Concepts of solution. - Deutsche Geod. Komiss., 1982, R.B, Nr. 258/6, 65 - 85.
7. Hein G.W. Integrated geodesy- state of the art. - In: Mathemat. and numerical techniques in phys. geodesy (ed. H.Sunkel), Springer-Verlag, 1986, 505 - 548.
8. Hein-G.W., Eissfeller B. A contribution to 3d-operational geodesy. Part 4: The observation equations of satellite geodesy in the model of integrated geodesy. - Schriftenreihe Univer. der Bundeswehr Munchen, 1986, Heft 17, p. 190.
9. Hein G.W., Landau H. A contribution to 3d-operational geodesy. Part 3: OPERA - A multi-purpose program for operational adjustment of geodetic observations of terrestrial type. - Deutsche Geod. Komiss., 1983, Nr. 264, 1 - 98.
10. Levie S.L. Transformation of potential function under coordinate rotations. - J. Astronaut. Sci., 1971, v.18, No 4, 217-235.

Результаты исследований, представленные в диссертации, опубликованы в следующих работах:

1. КАЩЕЕВ Р.А. О перспективах уточнения модели селенопотенциала по данным слежения за низкими ИСЛ. В кн.: Проблемы астрометрии. М., МГУ, 1984, 315 - 318.
2. КАЩЕЕВ Р.А. Гравитационное поле Луны: точность некоторых моделей. - Труды Каз. гор. АО, 1986, вып. 50, 130 - 136.
3. КАЩЕЕВ Р.А. О вычислении высокочастотных гармоник селенопотенциала. - Труды Каз. гор. АО, 1986, вып. 50, 137 - 141.

4. КАЩЕЕВ Р.А. О преобразовании лучевых ускорений ИСЛ. - Труды Каз. гор. АО, 1988, вып. 51, 94 - 98.
5. КАЩЕЕВ Р.А. Метод хорд в задаче объединения селенодезических каталогов. - Кинемат. и физика небес, тел, 1988, т.4, No 5, 84-87.
6. KASCHEEV R.A. Lunar gravity parameters from line-of-sight acceleration data. - Earth, Moon and planets, 19.88, v.41, 89 - 94.
7. КАЩЕЕВ Р.А. Гравитационное поле Луны: использование разнородных спутниковых наблюдений. - Труды Каз. гор. АО, 1989, вып. 52, 83-95.
8. КАЩЕЕВ Р.А. Перспективы интегративного подхода в селенодезии. - В кн.: Селенодезия и динамика Луны. Киев, Наукова думка, 1990, 127 - 130.
9. КАЩЕЕВ Р.А. Новый метод установления лунной системы координат по наземным и орбитальным данным. - В кн.: Селенодезия и динамика Луны. Киев, Наукова думка, 1990, 130 - 132.
10. КАЩЕЕВ Р.А. Алгоритмы единой геодезии. - Рук. деп. в ВИНТИ, 3939-в90, 1990, 30 с.
11. КАЩЕЕВ Р.А. Перспективы решения задач планетной геодезии по разнородным спутниковым наблюдениям. - Тез. докл. междунар. конф. "Общепланетарные проблемы исследования Земли", Казань, 1994, 27 - 28.
12. КАЩЕЕВ Р.А. Исследование гравитационных полей Луны и планет методом спутниковой градиентометрии (результаты численного эксперимента). - Тезисы конф. "Физика Луны и планет", Харьков, 1994, 53 - 54.
13. КАЩЕЕВ Р.А. Моделирование распределения вторых производных гравитационных потенциалов Луны и Марса на спутниковых высотах. - Кинемат. и физика небесн. тел, 1994, том 10, No 5, 29 - 34.

14. КАЩЕЕВ Р.А. Численный эксперимент по спутниковой градиентометрии Луны и Марса. - Изв. вузов. Геод. и аэрофот., 1995, No 5-6, 94 - 102.

15. КАЩЕЕВ Р.А. Результаты численных экспериментов по выбору орбит для спутниковой градиентометрии Луны и Марса. - Тез. докл. межд. конф. "Стохастические методы и эксперименты в небесной механике", Архангельск, 1995, с.35.

16. KASCHEEV R.A. A simulation of satellite gradiometry experiment near Moon and Mars in terms of integrated planetary geodesy. - Ann. Geophys. Suppl. to vol. 13, 1995. 1 p.

17. КАЩЕЕВ Р.А. О выборе орбит для спутниковой градиентометрии Луны и Марса. - Изв. вузов. Геод. и аэрофот., 1996, No 4, 42 - 50.

18. КАЩЕЕВ Р.А. Результаты численных экспериментов по спутниковой градиентометрии и межспутниковому слежению для Луны и Марса. - Тез. докл. 2-го межд. симпозиума по классической и небесной механике, Великие Луки, 1996, 39 - 40.

19. КАЩЕЕВ Р.А. Спутниковые методы определения гравитационных полей небесных тел. - Тез. докл. межд. конф. "Геометризация физики 3", Казань, 1997, с. 53.

20. КАЩЕЕВ Р.А. Численный эксперимент по межспутниковому слежению в системе коорбитальных искусственных спутников Луны и Марса. - Изв. вузов. Геод. и аэрофот., 1997, No 1, 49 - 55.

21. КАЩЕЕВ Р.А. Проблемы и перспективы планетной гравиметрии. - Тез. докл. межд. конф. "Результаты и перспективы исследования планет", Ульяновск, 1997, 43 - 44.

22. КАЩЕЕВ Р.А. О точности решения задач планетной гравиметрии методами спутниковой градиентометрии и межспутникового слежения. Изв. вузов. Геод. и аэрофот., 1997, No 4, 90 - 98.

23. КАЩЕЕВ Р.А. Межспутниковое слежение в задачах планетной гравиметрии. - Тез. докл. конф. "Новые теоретические результаты и практические задачи небесной механики", Москва, 1997, 47 - 48.

24. КАЩЕЕВ Р.А. Определение гравитационных полей небесных тел по разнородным спутниковым данным. - Изв. вузов. Геод. и аэрофот., 1998, No 3, 80 - 89.

25. КАЩЕЕВ Р.А. Исследование гравитационных полей небесных тел по данным об относительном движении их искусственных спутников. - Тез. докл. 3-го межд. симпозиума по классической и небесной механике. Великие Луки, 1998, 82 - 83.

26. KASCHEEV R.A. On the use of satellite gradiometry for determining gravity parameters. - Ann. Geophys. Suppl. to vol. 16, 1998, C1030.

27. KASCHEEV R.A. A simulation of satellite-to-satellite tracking mission near Moon and Mars. - Ann. Geophys. Suppl. to vol. 16, 1998, C1030.

28. KASCHEEV R.A. Advanced satellite technique for the lunar gravity analysis. - Abstr. 3-rd Int. Conf. of Exploration of the Moon, Moskva, 1998, p. 89.

29. KASCHEEV R.A. Planetary geodesy: the integrated approach. - Proc. Int. Conf. "Geometrization of Physics 4", Kazan, 1999, 149 - 154.

30. KASCHEEV R.A. Lunar gravity analysis by the satellite-to-satellite tracking method. - Abstr. 30-th Int. Braun-Vernadsky working meeting, Moskva, 1999, 2 p.

